

中学常见数学模型的分类与组织

王海华 2024/4/25



目录

Contents

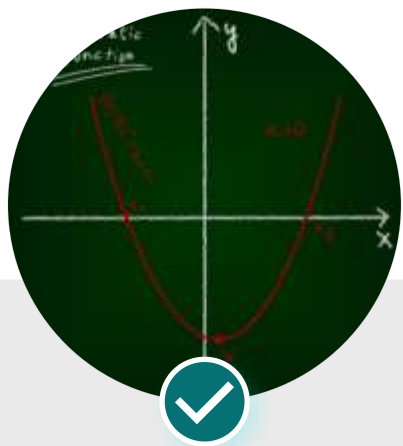
- 01** 模型分类的意义
- 02** 常见的模型分类
- 03** 面向问题解决的建模
- 04** 案例分析
- 05** 分析思维



01

数学模型分类的意义

分类的意义



提升模型的适用性

通过合理的分类，可以更准确地选择适合特定问题的数学模型。



增加模型的理解度

分类有助于清晰地理解不同模型的基本特征和适用范围，掌握其数学本质和应用前提。



指导教学和研究

分类标准有助于组织教材和课程内容，使学生能够系统地学习和掌握各类模型。



02

数学模型的多种分类

常见分类



除了上述分类以外, 还有根据确定性(确定与随机)、知识来源(物理与抽象)、分析尺度(宏观与微观)等划分标准。

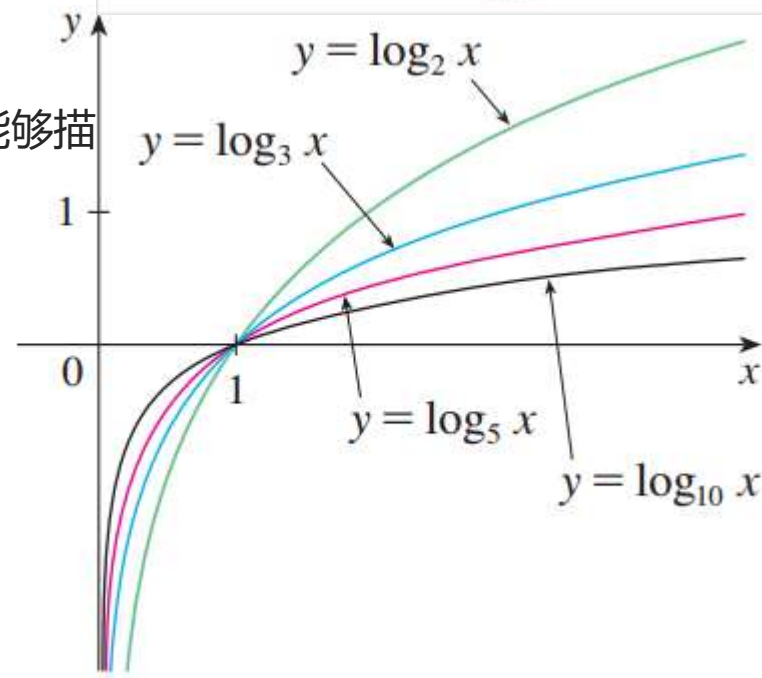
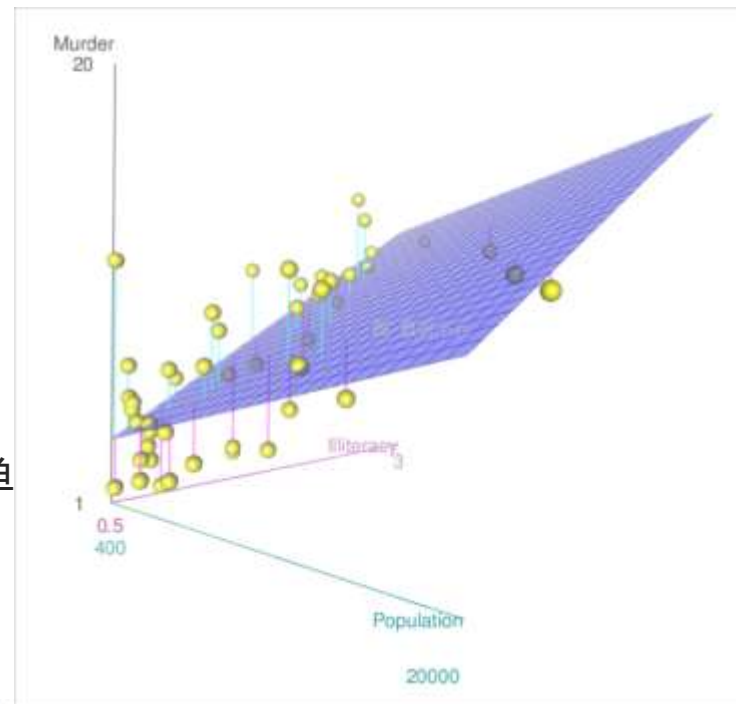
按变量关系分

线性

包括一次函数、直线方程、线性方程组等。线性模型是最简单也是最常见的数学模型之一，它描述了变量之间的直线关系。

非线性

包括二次函数、指数对数函数、幂函数、三角函数等，能够描述更加复杂的现象，如曲线关系和周期变化。



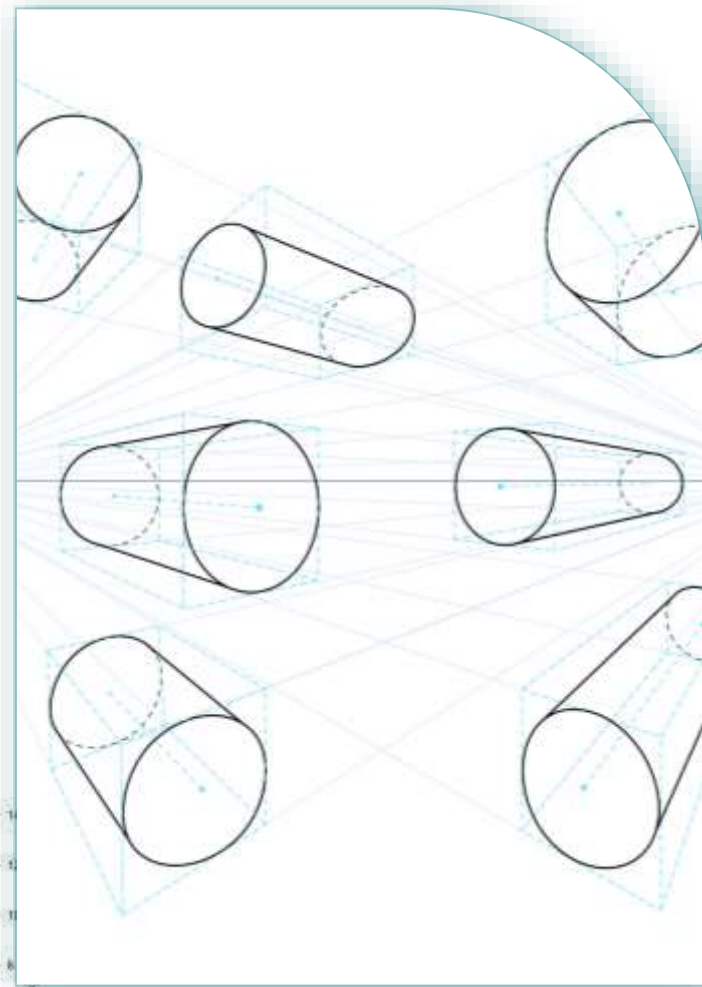
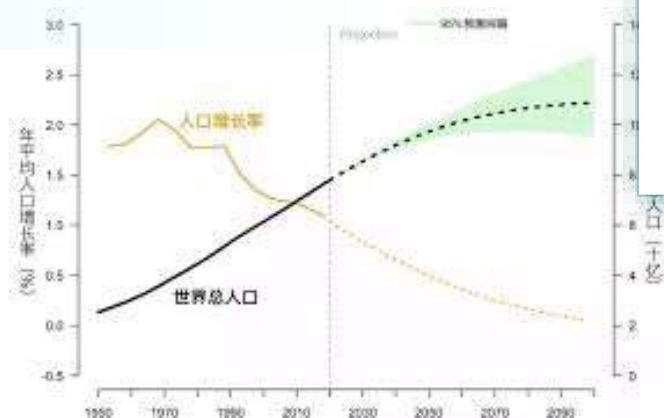
按时间依赖分

静态

包括几何图形属性、代数方程等。描述的是在特定时间点的状态或条件，不考虑时间的变化。

动态

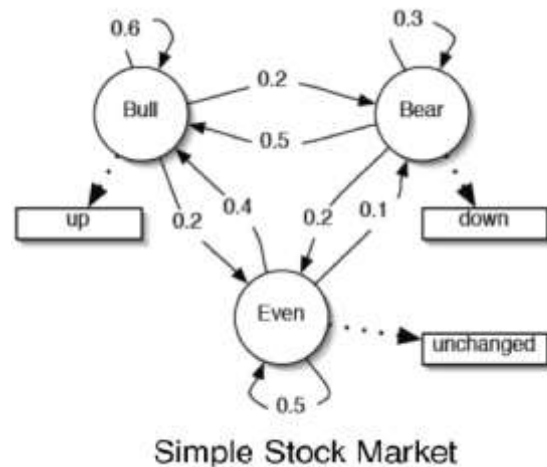
用于描述随时间变化的情况，比如运动问题、生长与衰减问题、复利计算问题。



按变量类型分

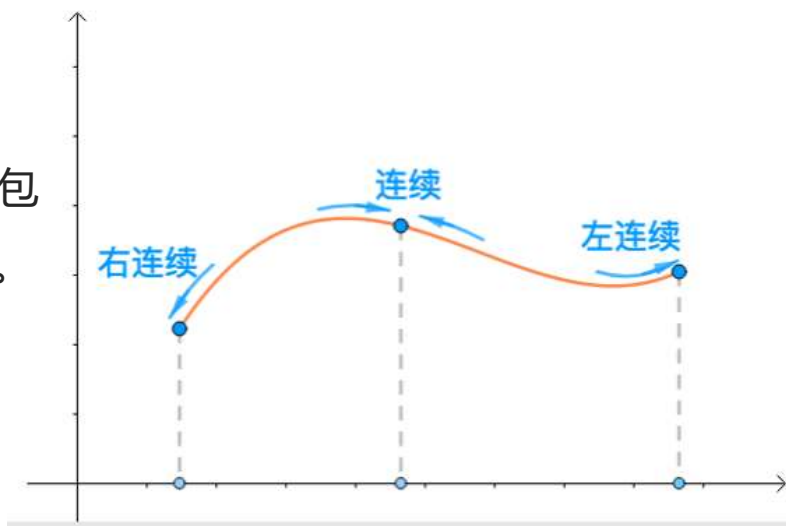
离散

涉及的变量是独立分开的，通常是整数，适合用于计数和序列分析。主要包括数列与技术、排列组合、图论等。



连续

涉及的变量可以在某个范围内任意取值，通常是实数，主要包括连续的函数关系、微积分初步以及几何模型（如测量）等。



按数学学科分

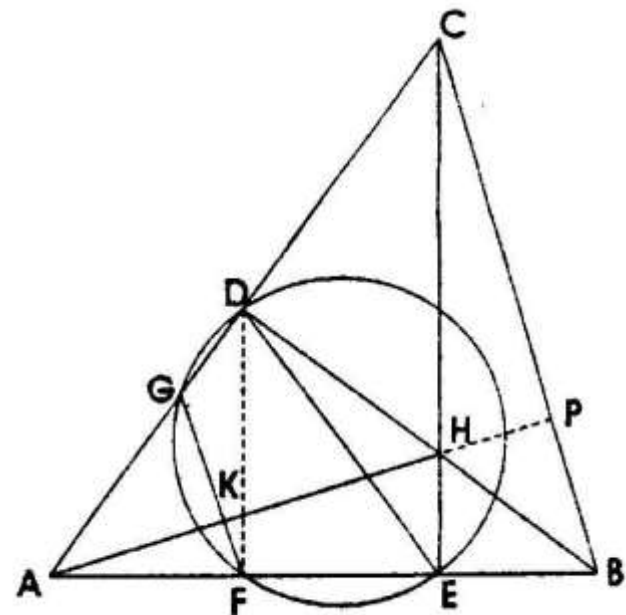
代数

使用变量、数字和运算符（如加、减、乘、除）来表达问题和解决问题，如方程、函数、不等式等。

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -20 \end{cases}$$

几何

使用图形和空间关系来表示和解决问题，如基础图形和属性、解析几何、几何变换、三角学等。



按建模依据分

理论

理论模型是基于理论知识和逻辑推理建立的。比如代数定理和方程、概率理论、几何公式等。

经验

经验模型是基于观测数据和实验结果建立的。比如统计回归、机器学习等。



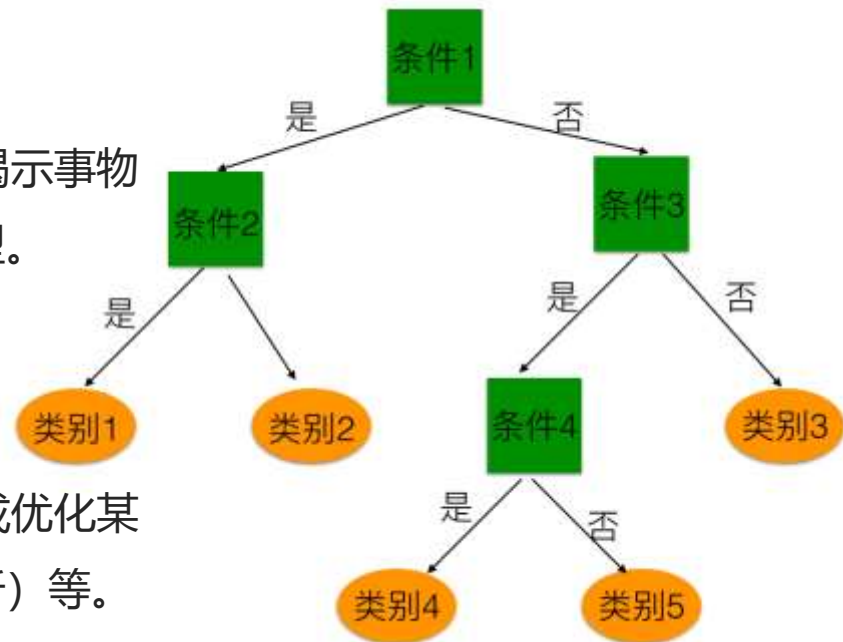
按模型功能分

描述性

用于解释和描述数据或现象之间的关系。帮助理解和揭示事物的内在规律和结构，如函数关系、统计模型、几何模型。

规范性

侧重于提供解决方案和决策支持，帮助预测未来结果或优化某些过程。如优化模型（求最值）、预测模型（回归分析）等。



小结

- 每种分类标准都强调了模型在某个方面的特点
- 关键是要构建起问题与模型之间的联系
- 抓住情境特点，选择或者建构合适模型

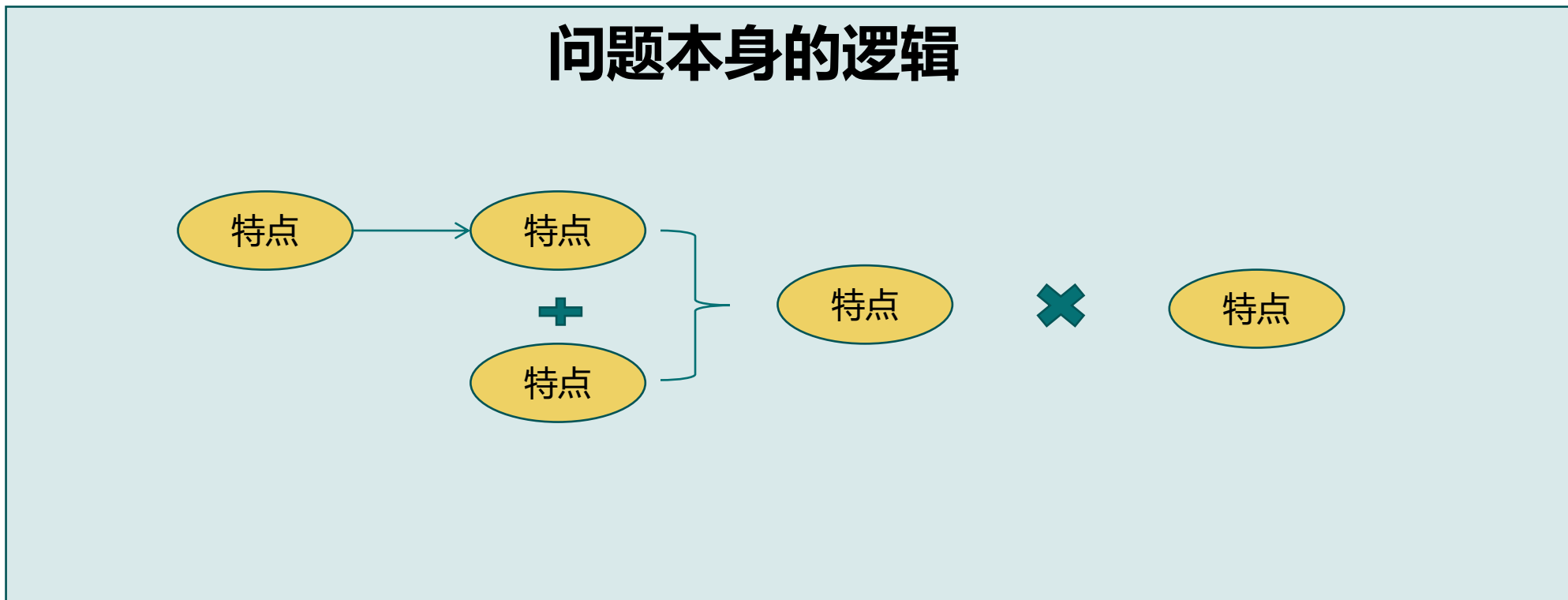




03

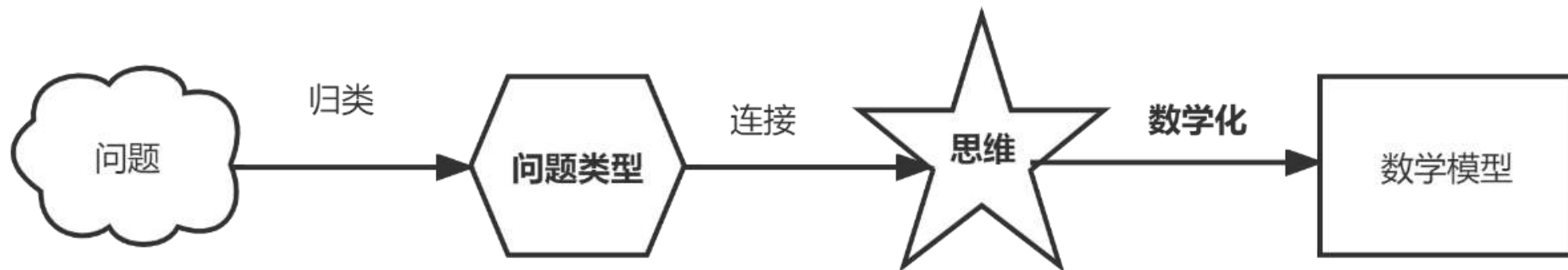
面向问题解决的建模

情境特点-形成逻辑



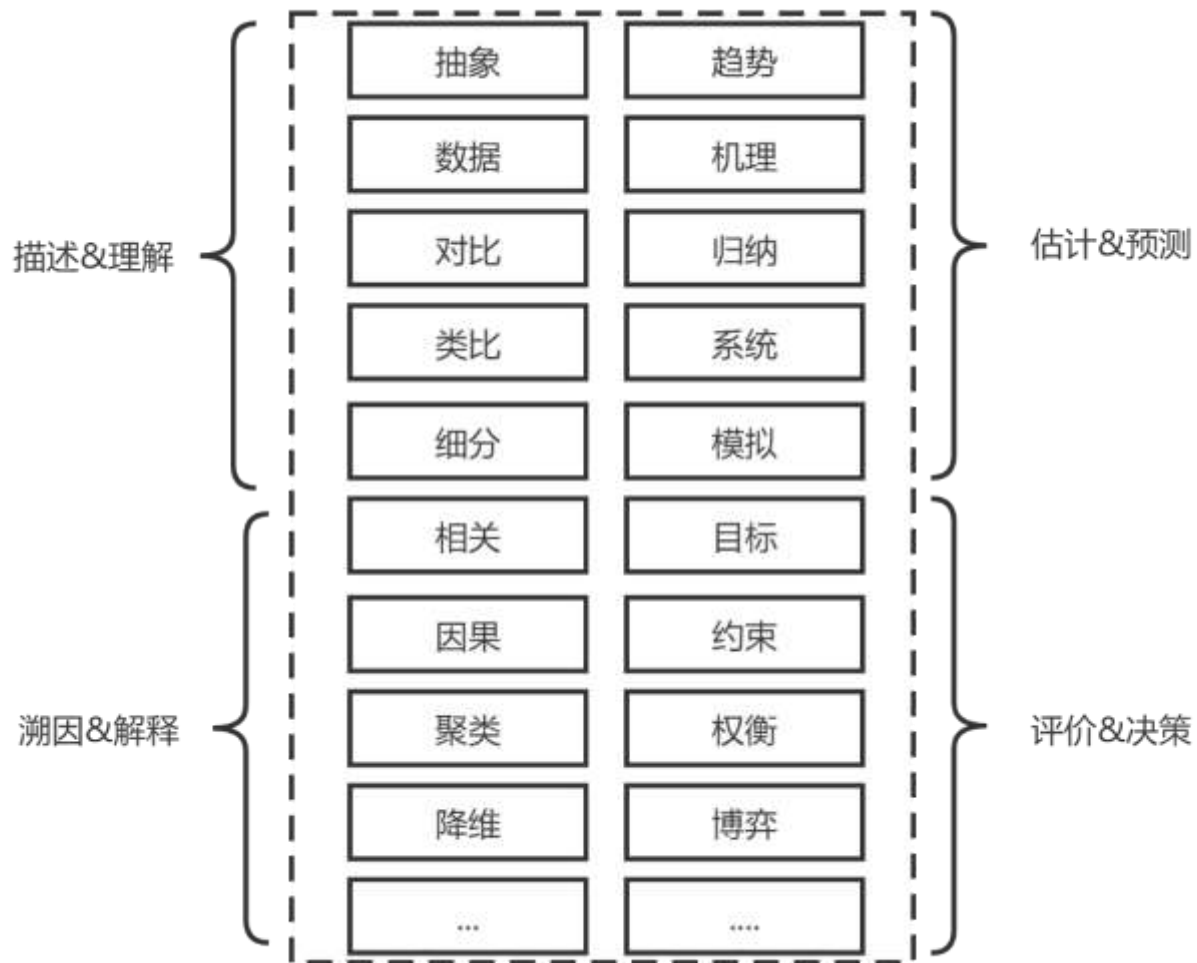
问题解决过程

我将数学建模置于问题解决的大框架下，从问题出发，归纳问题类型，再提出解决问题的思维方法，接下来对想法数学化，获得数学模型。



思维的数学化

问题类型与思维并不是一一对应的，比如一个问题可以发散出很多种思维，一种思维也可以对应不同类型问题的解决。



04

案例分析



案例分析

2024IMMC国际赛赛题

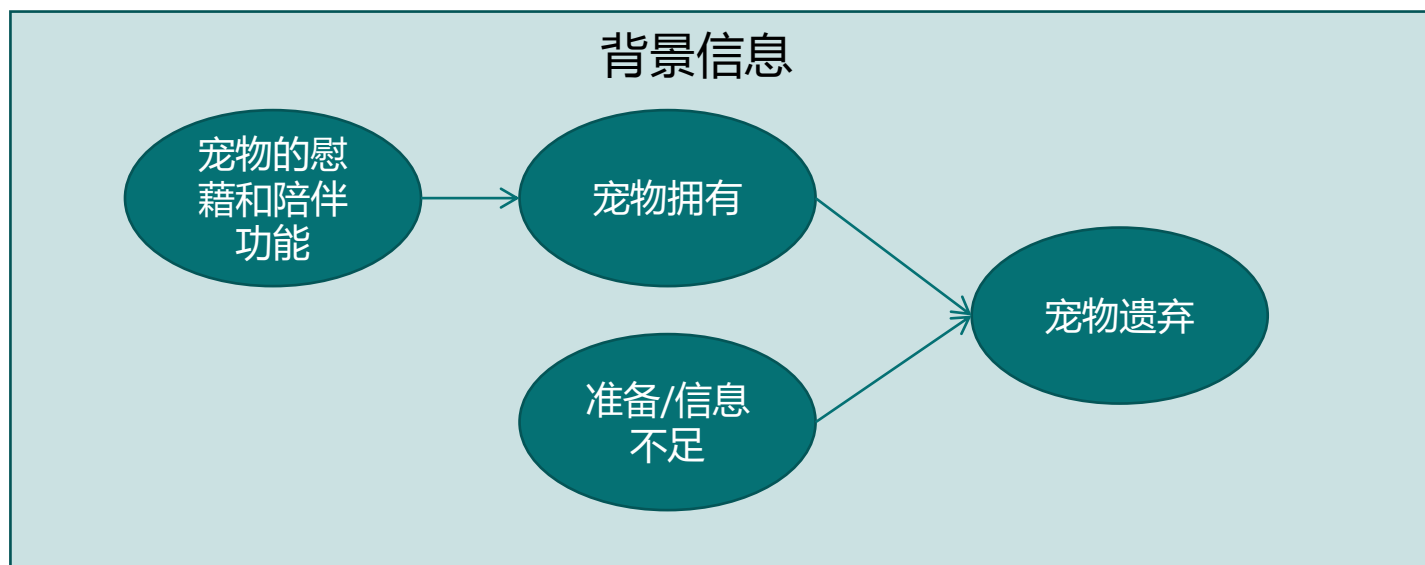
纵观历史，人类与动物**共存**，相互依赖以获得帮助和慰藉。从提供陪伴，到作为狩猎伙伴或提供其他体力劳动，我们与动物的联系非常深厚。最近的估计显示，**全球超过一半**的人在家中饲养了某种宠物，从常见的狗和猫到鸟类、啮齿类动物，甚至更为异国的种类如蛇类和两栖动物。无论是行走、飞翔、游泳还是爬行；无论是毛茸茸的、羽毛覆盖的（或有鳞片的）朋友，都继续在全球范围内支持并安慰人们。在COVID-19大流行高峰期期间，世界各地的国家和地区都**显著增加**了拥有宠物的家庭数量，凸显了宠物在艰难时期提供的慰藉和陪伴。然而，宠物拥有量的激增也突显了人宠关系的复杂性。**准备不足**或**信息不足**的新宠物主人常常导致宠物被送回收容所或被**遗弃**，造成了世界各地的大量流浪动物。这导致动物潜在的困难生存情况，同时也对人类和其他动物的健康构成了风险。

国际动物维护与关爱任务组（IMMC-A），一家关注所有潜在宠物福利的组织，正在请求你的团队帮助他们开发一种以**数量**为中心的宠物拥有方法，使动物和人类都受益。更具体地说，IMMC-A需要你的帮助，建立数学模型来确定哪些家庭**准备好**拥有宠物，**有多少**家庭准备好，以及**预测**未来的宠物拥有情况。

案例分析

2024IMMC国际赛赛题-一句话总结

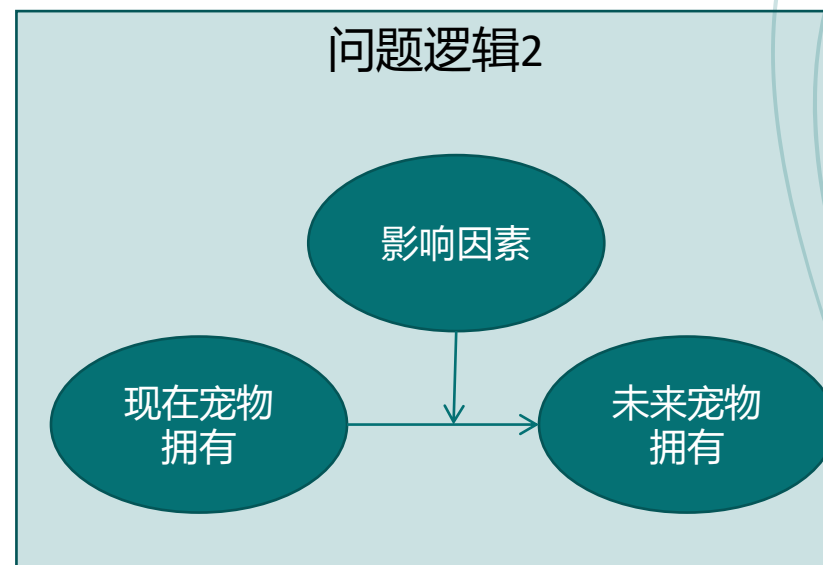
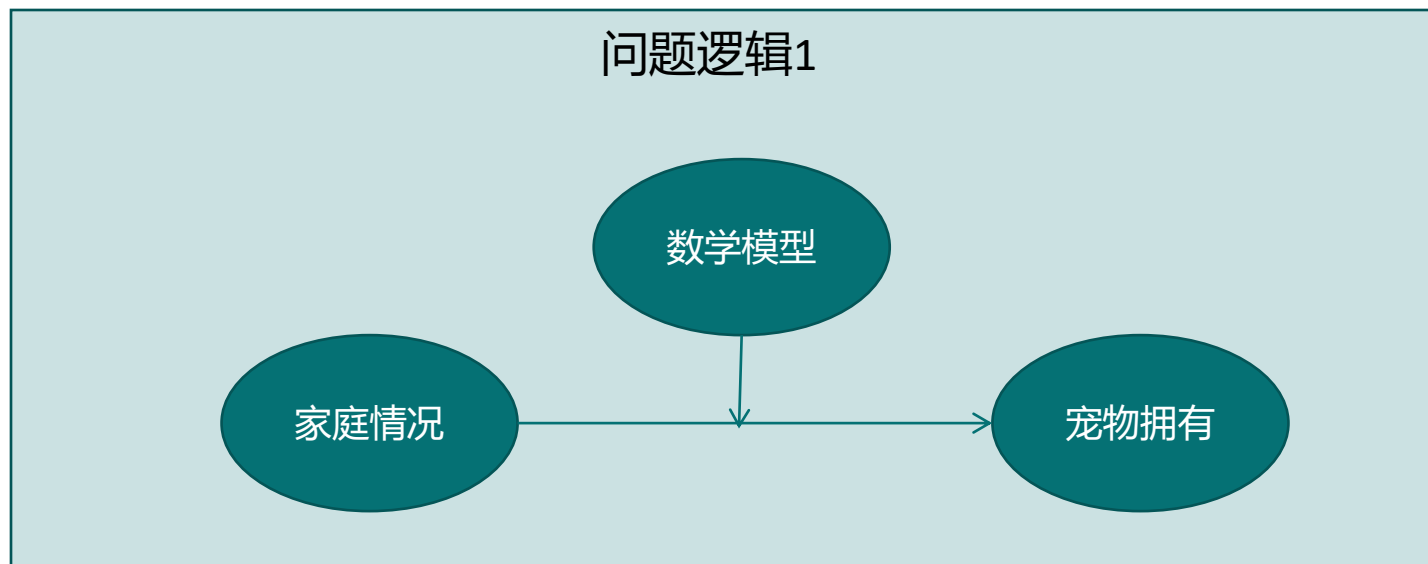
宠物在为人们提供慰藉和陪伴方面的重要作用。然而由于准备不足或信息不足的新宠物主人常常导致宠物被送回收容所或被遗弃。需要开发一个数学模型，以量化的方式评估哪些家庭准备好拥有宠物，预测有多少家庭具备这一条件，以及未来的宠物拥有率，从而确保人与宠物关系的健康可持续发展。



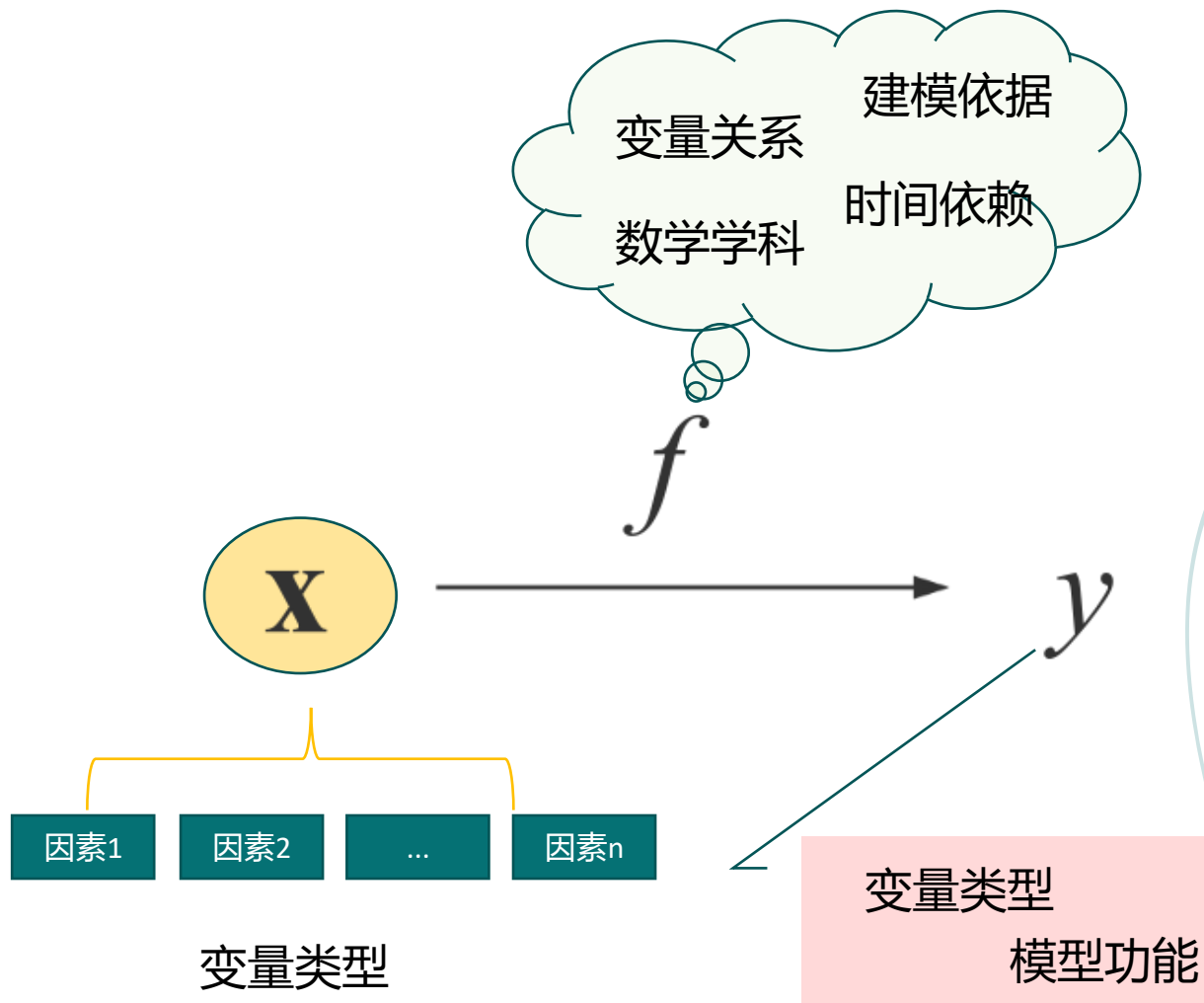
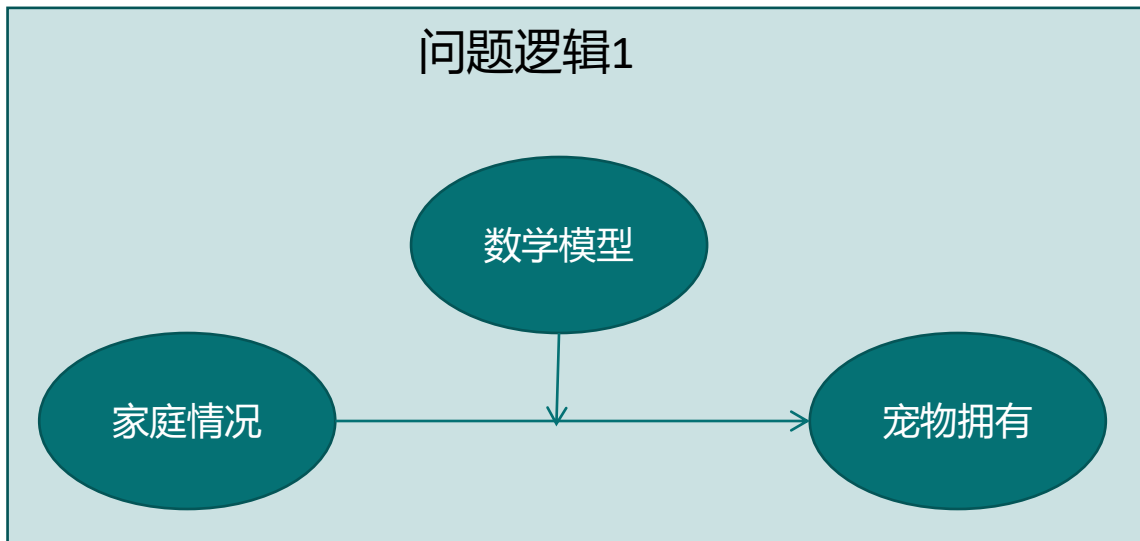
案例分析

2024IMMC国际赛赛题-一句话总结

宠物在为人们提供慰藉和陪伴方面的重要作用。然而由于准备不足或信息不足的新宠物主人常常导致宠物被送回收容所或被遗弃。需要开发一个数学模型，以量化的方式评估哪些家庭准备好拥有宠物，预测有多少家庭具备这一条件，以及未来的宠物拥有率，从而确保人与宠物关系的健康可持续发展。



逻辑的数学化



模型建立

变量类型

家庭结构：家庭成员数量、有无儿童、家庭成员年龄分布。

经济状况：家庭年收入、住房状况（如房屋大小、有无围栏的庭院）。

历史宠物拥有情况：以前是否拥有过宠物、宠物养护历史。

生活方式：家庭成员的工作时间、旅行频率。

健康状况：家庭成员中是否有过敏者、有无能力进行宠物护理的人员。

变量关系

考虑到模型的透明度和实用性，可以选择线性或非线性模型。线性模型易于理解和实施，而非线性模型能捕捉更复杂的关系。

建模依据

经验：通过历史数据分析，了解哪些因素与成功的宠物养护关系最为密切。

理论：动物心理学和兽医建议可以提供理论支持，指出哪些家庭环境对宠物更为有利。

建模依据

经验：通过历史数据分析，了解哪些因素与成功的宠物养护关系最为密切。

理论：动物心理学和兽医建议可以提供理论支持，指出哪些家庭环境对宠物更为有利。

一个可能的模型

$$P(y = 1 \mid X) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n)}}$$

y 表示家庭是否适合养宠物 (1表示适合, 0 表示不适合)

X 是上述变量的向量

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ 是模型参数



05

常见的思维与数学化

四种思维

分解

通过将问题分解为更简单的组成部分，人们可以更容易地理解、分析和解决问题。



01

因果

关注事物之间的因果关系。它涉及识别事件、行动或条件之间的因果联系，并推断出其中的结果或影响。



03

流程

流程思维是一种将任务或问题视为连续步骤或流程的方式。这种思维方式强调了活动的顺序性和逻辑性。



02

比较

通过将不同事物之间的相似性和差异性进行对比来理解问题或概念的一种方式。



04

分解思维



类别分解

将问题或概念分解为不同的类别或类型。



组成分解

将问题或概念分解为其组成部分或要素。



群体分解

将一个整体群体不同组别的子群体。

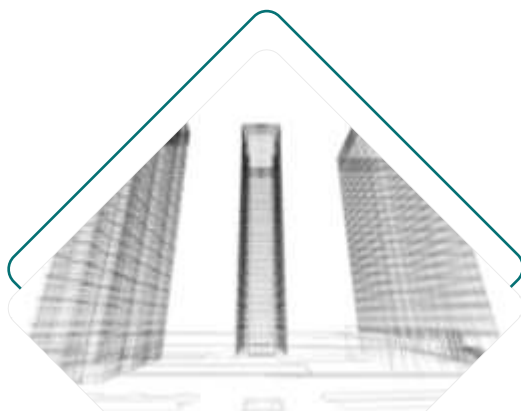
$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$$

流程思维



线性流程

按照固定顺序逐步执行的流程，其中每个步骤依次发生，前一个步骤的完成是后一个步骤开始的前提。



并行流程

多个步骤或任务同时进行，而不是顺序进行。通过并行处理，可以在多个前线同时推进工作。



迭代流程

涉及重复执行流程的某些部分，以逐步改进产品或结果。迭代流程强调适应性和持续改进，适合于需求快速变化的环境。

$$A = f_n \dots f_2(f_1(x_1), x_2) \dots, x_n)$$

因果思维



直接因果

最简单也是最直观的因果关系形式，即一个事件直接导致另一个事件发生。



间接因果

涉及中间变量或步骤，一个事件通过一个或多个中间环节影响另一个事件。



复合因果

多个因素同时或序列作用，共同导致一个或多个效果的情况。

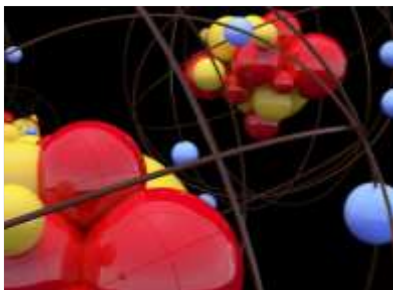
$$A = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

比较思维



同类比较

及将相似的事物进行对比，目的是为了找出它们之间的细微差别。这种比较帮助人们在相似选项中做出更明智的选择。例如，消费者在选择手机时可能会比较同一价格范围内不同品牌的手机性能、外观和用户评价。



异类比较

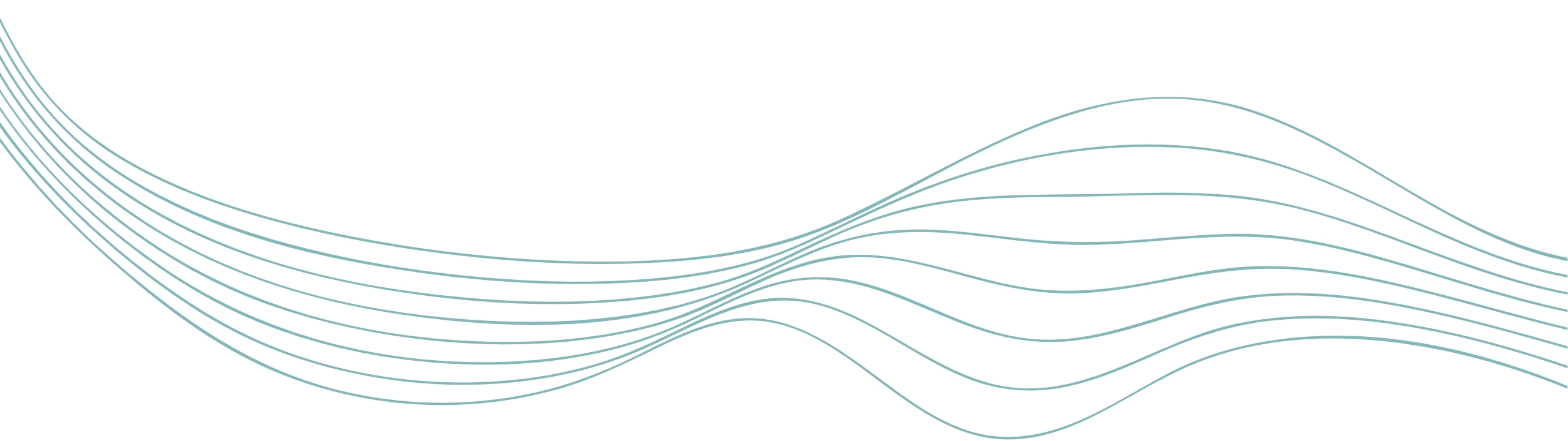
将本质上不同的事物进行对比，以探索它们在不同条件下的表现或在不同方面的共通性。这种比较方式可以用于跨学科的研究，例如比较经济学中的市场行为和生物学中的物种竞争，找到它们之间的相似模式。



情景比较

注在不同背景或条件下同一事物的表现。这种比较可以帮助评估某一策略或决策在不同环境中的效果。例如，在商业策略中，公司可能会比较在不同市场环境下同一广告活动的效果，或在科学研究中，通过改变实验条件来观察物质的不同反应。

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \cong f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$



谢谢

王海华